Функциональный анализ. Определения и формулировки

Васильченко Д.Д., 306

16 января 2024 г.

1 Теория меры

1.1 Кольцо. Минимальное кольцо. Полукольцо. Структура минимального кольца

Def 1. Непустое семейство множеств K из X называется кольцом, если $\forall A, B \in K$

1. $A \cap B \in K$
2. $A \triangle B \in K$

St 1. $A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$, $A \backslash B \in K$

Def 2. Кольцо называется σ-кольцом, если оно допускает счетное объединение

Def 3. Кольцо называется δ-кольцом, если оно допускает счетное пересечние

Def 4. Если $X \in K$, то кольцо называется алгеброй. X - единица

Def 5. Кольцо, которое содержится в $\forall$ кольце, содержащем S, называется минимальным кольцом $K(S)$

St 2. *Минимальное кольцо существует.*

Def 6. Непустое семейств S множеств из X называется полукольцом, если

1. $\forall A, B \in S \;\; A \cap B \in S$
2. $\forall A, B \in S \; B \subset A \Rightarrow \; \exists A_1, \ldots, A_n \in S : \; A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j \Rightarrow A \backslash B = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$

Лемма 1. *Пусть S - полукольцо.* $A, B_1, \ldots, B_n \in S$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j \Rightarrow \exists A_1, \ldots, A_m \in S : \; A_i \cap A_j = \varnothing, \; i \neq j \; : A \backslash \left(\coprod\limits_{k=1}^{n} B_k \right) = \coprod\limits_{l=1}^{m} A_l$

Th 1. *(О структуре минимального кольца)*
Пусть S - полукольцо. K(S) - минимальное кольцо, порожденное $S \Rightarrow K(S)$ состоит из всевозможных множеств вида $\coprod\limits_{k=1}^{m} A_K$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $A_j \in S$, $j = \overline{1, m}$

1.2 Общее определение меры

S - полукольцо

Def 7. Мерой множества $A \in S$ называется число $\mu(A)$, удовлетворяющее условиям:

1. $\mu(A) \geq 0$
2. $\mu\left(A_1 \coprod A_2\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$

Если 2 верно для счётного объединения, то мера называется σ-аддитивной.

St 3. *S - полукольцо с мерой μ. $A, B \in S$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$*

Def 8. Мера μ, заданная на кольце K, называется непрерывной, если $\forall$ монотонной последовательности множеств $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A \subseteq K$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Th 2. *Мера непрерывна $\Leftrightarrow$ она σ-аддитивна.*

Следствие 1. *В силу принципа двойственности, если μ, заданная на K, непрерывна, то $\forall$ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$*

Продолжение меры на минимальное кольцо

Пусть S - полукольцо, K - кольцо, $S \subset K$. На S задана мера m, На K задана мера μ.

Def 9. Говорят, что мера μ есть продолжение меры m, если $\forall A \in S$ $\mu(A) = m(A)$

Th 3. *Если K(S) - минимальное кольцо, порожденное S, то $\exists!$ продолжение меры с полукольца на кольцо. Если m - σ-аддитивна, то и μ σ-аддитивна.*

Свойства σ-аддитивной меры

Th 4. *Пусть K - кольцо с мерой μ, $A, A_1, \dots \in K \Rightarrow$*

1. *если $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, тогда $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset A \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$*
2. *если мера μ σ- аддитивная и $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$*

Th 5. *Длина счетно аддитивна на $S = \{[a, b)\}$*

1.3 Мера Лебега

K-алгебра элементарных множеств со счётно аддитивной мерой m. X - единица, $m(X) < \infty$

Def 10. Верхней мерой множества $A \subset X$ назыается

$$\mu^*(A) = \inf_{B_1,\dots,B_n,\dots \in K \ A \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_k} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$$

Th 6. *Если* $A \in K \Rightarrow \mu^*(A) = m(A)$

Def 11. Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если $\mu^*(A) + \mu^*(x \backslash A) = m(X)$

Def 12. Нижней мерой множества $A \subset X$ называется $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \backslash A)$

Th 7. *Пусть* $A, A_1, A_2, \dots \subset X$, $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

Следствие 2. $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

Следствие 3. $\mu_*(A) \geq 0$

Следствие 4. $\forall A, B \subset X \Rightarrow |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$

Лемма 2. *Если* $\mu^*(A) = 0 \ \Rightarrow A$ *измеримо и* $\mu(A) = 0$

Def 13. Мера называется полной, если $\forall$ подмножество множества меры ноль измеримо и имеет меру нуль.

Th 8. *Множество* $A \subset X$ *измеримо* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \in K \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$

Следствие 5. *A - измеримо, если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ *измеримое:* $\mu^*(A \triangle C) < \varepsilon$

Th 9. μ^* *- мера на измеримых множествах*

Следствие 6. μ^* *- счётно аддитивная мера на измеримых множествах*

Th 10. *Счётное объединение измеримых множеств - измеримо*

Следствие 7. *Счётное пересечение измеримых множеств - измеримо*

Случай $m(x) = \infty$

Def 14. Мера μ называется σ-конечной, если $\exists X_1, X_2, \dots \in K : \ \mu(X_i) < \infty, \ i = 1, 2, \dots \Rightarrow X = \coprod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$

Def 15. Множество A называется измеримым, если измеримы все $A \cap X_i$, $i = 1, 2, \dots$ при этом мерой A называется $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap X_i)$

1.4 Измеримые множества на R

$X = R$, обычная мера Лебега на прямой.

St 4. $\forall$

Th 11. *Всякое открытое множество на прямой представимо ввиде не более, чем счётного обьединения попарно непересекающихся интервалов.*

1.5 Канторово множество

Канторово множество имеет меру нуль.

1.6 Борелевские множества

Def 16. Борелевскими называются множества, получающиеся в результате счётного объединения или пересечения открытых множеств

St 5. *Борелевская мера не полна.*

St 6. $\forall$ *измеримое множество можно заключить в борелевском множестве той же меры.*

1.7 Многомерный случай R^n

Th 12. *Всякое открытое множество в R^m измеримо по Лебегу.*

1.8 Мера Жордана

$m(X) < \infty$

Def 17. Верхняя мера Жордана: $\mu_J^*(A) = \inf\limits_{A \subset \cap_{i=1}^n B_i} \sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i)$

Def 18. Нижняя мера Жордана: $\mu_{*J} = m(X) - \mu_J^*(x\ A)$

1.9 Мера Лебега-Стилтьеса

$F(t)$ - неубывающая функция, $t \in R$. $X = R$, $S = \{[a,b)\} \Rightarrow m_F([a,b)) = F(b) - F(a)$.

Th 13. *m_F - σ-аддитивная $\Leftrightarrow$ $F(t)$ непрервыная слева.*

1.10 Сравнение мер. Абсолютная непрерывность

Def 19. Пусть σ - аддитивные меры μ и v заданы на σ - алгебры $\sum$. Мера v называется абсолютно непрерыной относительно норм μ, если из $\mu(A) = 0$ $\Rightarrow v(A) = 0,\ \forall A \in \sum$.

Th 14. *Пусть σ-аддитивные меры μ, v заданы на σ-алгебре $\sum \Rightarrow$ мера v абсолютно непреревына относительна μ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \mu(A) < \delta\ \Rightarrow v(A) < \varepsilon\ \forall A \in \sum$*

1.11 Канторова лестница

Def 20. Функция $f(t)$ называется абсолютно непрерывной, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(a_k, b_k), k = \overline{1, N},\ (a_k, b_k)\cap(a_j, b_j) =, k \neq j,\ \sum\limits_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{N}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$

Th 15. *Пусть мера μ порожденная длиной, и мера v - функцией $f \Rightarrow v$ абсолютно непрерывна относительно $\mu \Leftrightarrow f(t)$ - абослютно непрерывна.*

Канторова лестинца:
Хз как здесь написать, картинки нужны)

1.12 Взаимно сингулярные меры

Def 21. Две σ-аддитивные меры μ и v заданные на общей σ-алгебре $\sum$, называются взаимно сингулярными, если $\exists A \in \sum:\ \mu(A) = v(X\backslash A) = 0$

2 Измеримые функции

Триплет: $\{X, \Sigma, \mu\}$.

Def 22. Функция $f(x)$, $x \in X$ называется измеримой, если $\forall c \in R$ множество $\{x \in X:\ f(x) < c\}$ измеримо. (далее сокращенно $\{f < c\}$)

Th 16. *Следующие 4 утверждения эквиваленты:*

1. $\forall c \in R$ *измеримо* $\{f < c\}$
2. $\forall c \in R$ *измеримо* $\{f \leq c\}$
3. $\forall c \in R$ *измеримо* $\{f > c\}$
4. $\forall c \in R$ *измеримо* $\{f \geq c\}$

Лемма 3. *f - измерима $\Rightarrow f + c$ - измерима, $c = const$*

Лемма 4. *f - измерима $\Rightarrow c * f$ - измерима, $c = const$*

Лемма 5. *$f,\ g$ - измеримы $\Rightarrow \{f < g\}$ - измерима*

Th 17. *$f,\ g$ - измеримы $\Rightarrow f \pm g$ - измерима*

Th 18. *Линейная комибнация измеримых функций измерима*

Лемма 6. *f - измерима $\Rightarrow |f|$ - измерима*

Лемма 7. *f - измерима $\Rightarrow f^2$ - измерима*

Th 19. *$f,\ g$ - измеримы $\Rightarrow f * g$ - измерима*

Th 20. *$f,\ g$ - измеримы и $g \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ - измерима*

Def 23. Если какое-либо свойство выполнено во всех точках, за исключением точек множества меры ноль, то свойство выполнено почти всюду

Def 24. Функции f и g называются эквивалентными, если $f = g$ почти всюду

Th 21. *Если g -измерима и $f \sim g$, то f - измерима*

Th 22. *Если $f_k(x)$ - измеримы при $k \in N$ и $f_k(x) \to f(x)$, то $f(x)$ - измерима*

Th 23. *Пусть $f_k(x)$ - измеримы при $k \in N$, тогда $\max(f_1(x), \dots, f_n(x)), \min(f_1(x), \dots, f_n(x)), \overline{f}(x) = \sup\limits_{k \geq 1} f_k(x), \underline{f}(x) = \inf\limits_{k \geq 1} f_k(x)$ - измеримы*

Th 24. *Пусть $f_k(x)$, $k \in N$ измеримы $\Rightarrow \overline{\lim} f_k$ и $\underline{\lim} f_k$ при условии их конечности почти всюду измеримы*

Th 25. *Если $f(x)$ - измерима и дифференцируема, то $f'(x)$ - измерима*

2.1 Сходимость по мере

Пусть $\mu(X) < \infty$.

Def 25. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_k(x)$, $x \in X$, $k \in N$ сходится по мере к измеримой функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$. ($f_n \xrightarrow{\mu} f$)

Th 26. *Если f и g - пределы f_k по мере, то $f \sim g$*

Th 27. *(Рисса)*
Из последовательности измеримых функций, сходящейся по мере к измеримой функции можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к этой функции почти всюду.

Th 28. *(Егорова)*
Пусть $f_n \to f$ почти всюду на X, все f_n измеримы и $\mu(X) < \infty \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists X_\delta \subset X\ \mu(X \backslash X_\delta) < \delta$ и $f_n \rightrightarrows f$ на X_δ

3 Интеграл Лебега

3.1 Ограниченные функции

Def 26. Функция называется простой, если она измерима и принимает конечное число значений. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$, где $X = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \in \Sigma$.

Def 27. Интеграл Лебега от простой функции: $(L) \int\limits_X f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \mu(A_k)$

Свойства такого интеграла:

1. $\int\limits_X C * f d\mu = C * \int\limits_X f d\mu$

2. $\int\limits_X (f \pm g) d\mu = \int\limits_X f d\mu \pm \int\limits_X g d\mu$

3. Линейность

4. $|\int\limits_X f d\mu| \leq \max |f_1|, \ldots, |f_n| \mu(X)$

Лемма 8. *Пусть $f_n(x)$ - последовательность простых функций и $f_n \rightrightarrows f$ на X, тогда $\int\limits_X f_n d\mu$ - сходится как числовая последовательность.*

Def 28. Пусть $f(x)$ - равномерный предел простых функкий $f_n(x)$, тогда интегралом Лебега от функции $f(x)$ называется $(L) \int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu$

Лемма 9. *Для $\forall$ ограниченой измеримой функции f $\exists$ существует последовательность f_n простых функций, такая что $f_n \rightrightarrows f$.*

Th 29. *$\forall$ измеримая ограниченая функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу, причём $\int\limits_X f d\mu$ может быть найден, как предел $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \mu(A_{k,n}) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{k}{n} \mu(\{\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\})$*

3.2 Неограниченные функции

Def 29. Функция $f(x)$ называется простой со счётным числом значений, если $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$, где $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k = X,\ A_k \in \Sigma$.

Def 30. Интегралом от простой функции со счётным числом значение при условии его существования ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| \mu(A_k)$ - сходящийся) называется $(L) \int\limits_x f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A_k)$

Свойства такого интеграла:

1. $\int\limits_X C * f d\mu = C * \int\limits_X f d\mu$

2. $\int\limits_X (f \pm g) d\mu = \int\limits_X f d\mu \pm \int\limits_X g d\mu$

3. Линейность

4. $|\int\limits_X f d\mu| \leq \sup\limits_X |f_k| \mu(X)$

5. Если $|f| \leq g$ и g - интегрируема, то f - интегрируема и $|\int\limits_X f d\mu| \leq \int\limits_X g d\mu$

Лемма 10. *Пусть f_n - последовательность интегрируемых простых функций со счётным числом значений, равномерно сходящаяся к f ($f_n \rightrightarrows f$), тогда $\int\limits_X f_n d\mu$ сходится, как числовая последовательность.*

Def 31. Функция f называется интегрируемой по Лебегу, если существует последовательность f_n - простых функций со счётным числом значений, равномерно сходящаяся к f ($f_n \rightrightarrows f$ на X). В этом случае интеграл Лебега от f: $(L)\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

Лемма 11. *Пусть $f_n, \overline{f}_n$ - последовательности простых функций со счётным числом значений и $f_n \rightrightarrows f$, $\overline{f}_n \rightrightarrows f$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \overline{f}_n d\mu$*

Лемма 12. *Пусть $f(x)$ - инетгрируема на X и f_n - последовательность простых функций со счётным числом значений, такая что $f_n \rightrightarrows f$ на X, тогда начиная с некоторого номера N функции f_n интегрируемы.*

Свойства интеграла Лебега

1. $\int\limits_X C * f d\mu = C * \int\limits_X f d\mu$
2. $\int\limits_X (f \pm g) d\mu = \int\limits_X f d\mu \pm \int\limits_X g d\mu$
3. Если $f(x) \geq 0$ п.в. $\Rightarrow \int\limits_X f d\mu \geq 0$
4. Если $f(x) \leq g(x)$ п.в. $\Rightarrow \int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$
5. Если $f(x)$ интегрируема, то и $|f(x)|$ - интегрируема, обратное неверно.
6. Если $f(x)$ - измерима, а $g(x)$ - интегрируема и $|f(x)| \leq g(x)$, то $f(x)$ - интегрируема и $|\int\limits_X f d\mu| \leq \int\limits_X g d\mu$
7. Если $f(x)$ - интегрируема, а $g(x)$ - измерима и ораничена, то $f * g$ - интегрируема
8. (Аддитивность по множеству интегрирования) Пусть $X = A \coprod B$, f - интегрируема $\Rightarrow \int\limits_X f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu$
9. Если f - измерима и $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int\limits_A f d\mu = 0$.
10. Если $f = 0$ п.в, то $\int\limits_X f d\mu = 0$
11. Если f- интегрируема и $f \geq 0$, но $\int\limits_X f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ п.в.

Th 30. *(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега)*
Пусть f - интегрируема на $X \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall A \in \Sigma : \mu(A) < \delta \Rightarrow |\int\limits_A f d\mu| \leq \varepsilon$

Th 31. *(Счётная аддитивность интеграла Лебега)*
Пусть $f(x)$ - интегрируема на X и $X = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \Sigma \Rightarrow \int\limits_X f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Th 32. *Пусть дана $f(x)$, $x \in X$ и $X = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, все A_k - измеримы, $f(x)$ интегрируема на A_k и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f| d\mu$. Тогда $f(x)$ интегрируема на X.*

3.3 Предельные переходы

Th 33. *Пусть f_n - интегрируемые на X функции и $f_n \rightrightarrows f$, тогда f - интегрируема на X и $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.*

Th 34. *(Лебега)*
Пусть f_n последовательность измеримых функций и $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $\exists F$ - интегрируемая, такая что $|f_n| \leq F$ п.в. $\Rightarrow f, f_n$ - интегрируемы на X и $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$

Th 35. *(Леви)*
Пусть f_n - последовательность интегруемых на X функций и $f_n \leq f_{n+1}$ п.в. и $\exists c : \int\limits_X f_n d\mu \leq C \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (конечный или бесконечный) и f - интегрируема на X, $\int\limits_X f d\mu \leq C$ и возможен переход к пределу ($\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$).

Следствие 8. *Пусть f_n - последовательность неотрицательных интегрируемых на X функций и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu < +\infty \Rightarrow F(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_n(x)$ интегрируема на X и $\int\limits_X F d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.*

Th 36. *(Фату) $f_n(x) \geq 0$ - интегрируемы на X и $\exists : \int\limits_X f_n d\mu \leq c \Rightarrow f(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ - интегрируема на X и $\int\limits_X f d\mu \leq c$.*

4 Сравнение интеграла Лебега и Римана

Th 37. *Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману на $X \Rightarrow f(x)$ интегрируема по Лебегу на X*

Th 38. *(критерий интегрируемости по Риману)*
$f(x)$ интегрируема по Риману на $X \rightrightarrows f(x)$ почти всюду непрерывна на X.

5 Пространство суммируемых функций L1

X, μ (полная)

Def 32. $L_1(X,\mu)$ -пространство функций, для которых существует и конечен интеграл $\int\limits_X |f| d\mu$. $\|f\|_{L_1} = \int\limits_x |f| d\mu$.

Th 39. *Пространство L_1 - полное.*

Лемма 13. *Пусть $f(x) \in L_1(X,\mu)$, тогда $\exists$ $\{f_n(x)\}$ - простые функции со счётным числом значений: $\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$*

Лемма 14. *Пусть $f(x) \in L_1(X,\mu)$, тогда $\exists$ $\{f_n(x)\}$ - простые функции с конечным числом значений: $\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$*

Th 40. $d\mu = dx$ $f \in L_1(0,1) \Rightarrow \exists \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty},\ \phi_n \in C(0,1):\ \|f - \phi_n\|_{L_1} \to 0$

Th 41. *(О непрерывности в интегральной метричке)*
$d\mu = dx$, $f \in L_1(0,1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \Delta : |\Delta| < \delta \Rightarrow \int\limits_{(0,1)} |f(x+\Delta) - f(x)| dx < \varepsilon$. *Вне (0,1) f доопределяется 0.*

6 Пространство Lp

Def 33. Пространство $L_p(X,\mu)$ - пространство функций, для которых существует и конечен интеграл $\int\limits_X |f|^p d\mu$. Норма $\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

Th 42. *(Неравенство Юнга)*
$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ a, b > 0 \Rightarrow ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Th 43. *(Неравенство Гёльдера)*
$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ f \in L_p(X,\mu), g \in L_q(X,\mu),\ fg \in L_1(X,\mu) \Rightarrow \|fg\|_{L_1} \le \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$

Th 44. *(Неравенство Минковского)*
$f, g \in L_p(X,\mu) \Rightarrow \|f+g\|_{L_p} \le \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$

Th 45. *Пространство $L_p(X,\mu)$ - полное.*

Лемма 15. *Пусть $f(x) \in L_p(X, \mu)$, тогда $\exists$ $\{f_n(x)\}$ - простые функции со счётным числом значений: $\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$*

Лемма 16. *Пусть $f(x) \in L_p(X, \mu)$, тогда $\exists$ $\{f_n(x)\}$ - простые функции с конечным числом значений: $\|f_n - f\|_{L_1} \to 0$*

Th 46. *Если $f \in L_p(D, dx)$, D - ограниченое замкнутое множество $\Rightarrow \exists$ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} : \phi_n \in C(D) : \ \|\phi_n - f\|_{L_p} \to 0$*

Th 47. *$d\mu = dx$, $f \in L_p(X, \mu) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta : \ |\Delta| < \delta \Rightarrow \|f(x + \Delta) - f(x)\|_{L_p} < \varepsilon$. Вне D доопределяем f нулем.*

7 Заряды

X, Σ - сигма-алгебра

Def 34. Отображение $\Phi(A) : \ \Sigma \to \mathbb{R}$ называется зарядом, если $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k, \ A_k \in \Sigma$, $\Phi(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$, ряд должен абсолютно сходиться.

Def 35. Множество $A \in \Sigma$ называется положительным относительно заряда Φ, если $\forall B \subset A, \ B \in \Sigma \Rightarrow \Phi(B) \geq 0$.

Лемма 17. *Пусть $A \in \Sigma$, тогда $\sup\limits_{B \subset A, B \in \Sigma} |\Phi(B)| < \infty$*

Th 48. *(Жордана)*
Пусть заряд $\Phi(A)$ задан на множестве X, тогда $\exists X^-, X^+ : \ X^- \cap X^+ = \emptyset$, $X = X^+ \coprod X^-$, X^- - отрицательно относительно Φ, X^+ - положительно относительно Φ.

Следствие 9. *Заряд Φ представляется в виде разности двух мер $\nu^{\pm}$: $\Phi = \nu^+ - \nu^-$, $\forall A \in \Sigma$.*

Th 49. *(Радона-Никодима)*
Пусть ν, μ - σ -аддитивные меры, заданные на Σ, ν абсолютно непрерывна относительно μ, тогда существует f такая, что $\nu(A) = \int\limits_A f d\mu$.

Лемма 18. *Условия предыдущей теоремы + $\nu(X) > 0 \Rightarrow \exists A \in \Sigma, \delta > 0$: $\nu(A) > 0, \ \forall B \subset A, \ B \in \Sigma \Rightarrow \nu(B) \geq \delta\mu(B)$.*

Def 36. Функция f из теоремы Радона-Никодима называется производной Радона-Никодима ($f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$).

Th 50. *(о замене переменной)*
Пусть ν абсолютно непрерывна относительно μ, $\rho = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ - производная Радона-никодима и $f\rho$ - интегрируема $\Rightarrow$ f - интегрируема и $\int\limits_X f d\nu = \int\limits_X f \rho d\mu$

8 Теорема Фубини

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$, $Z = X \times Y$, Пусть $D = A \times B, \mu_z(D) = \mu_x(A) * \mu_y(B)$ и справедливо $\mu_z(A) = \int\limits_A \mu_y(D_x) d\mu_x$, где $D_x = \{y : \ (x,y) \in D\}$

Лемма 19. *Пусть P_x, P_y - полукольца, тогда $P_z = P_x \times P_y$ - полукольцо.*

Th 51. *Пусть μ_x, μ_y - σ -аддитивные меры на P_x, P_y, тогда μ_z σ-аддитивная на P_z.*

Лемма 20. *Пусть μ - мера Лебега, C измеримо относительно μ, тогда $\exists D : \ C \subset D, \ \mu(C) = \mu(D), \ D = \cap_{k=1}^{\infty} C_k, \ C_{k+1} \subset C_k, \ C_k = \cup_{n=1}^{\infty} B_{n,k}, \ B_{n,k} \subset B_{n+1,k}, B_{n,k}$ - элементарные.*

Th 52. *Пусть C измеримо относительно $\mu_z = \mu_x \otimes \mu_y$, тогда C_x измеримо относительно μ_y и $\mu_y(C_x)$ интегируема по X и $\mu_z(C) = \int\limits_X \mu_y(C_x) d\mu_z$*

Th 53. *(Фубини)*

1. *Пусть $f(x,y)$ интегрируема по μ_z на Z, тогда $f(x,y)$ п.в. интегрируема по Z_x, а функция $I(x) = \int\limits_Y f(x,Y) d\mu_y$ интегрируема по X и $\int\limits_Z f(x,y) d\mu_z = \int\limits_X I(x) d\mu_x$*
2. *Пусть $f(x) \geq 0$ и существует повторный интеграл, тогда существует и двойной и они равны.*

9 Метрические пространства

Def 37. Пространство M называется метрическим, если для $\forall x, y \in M$ задано отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1. Неотрицательность $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \rightrightarrows x = y$
2. Симметричность $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. Неравенство треугольника $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Def 38. Открытый шар с центром в точке x_0, радиусом r из M: $B(x_0, r) = \{x \in M : \ \rho(x, x_0) < r\}$

Def 39. Замкнутый шар с центром в точке x_0, радиусом r из M: $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in M : \ \rho(x, x_0) \leq r\}$

Def 40. Множество называется открытым, если $\forall$ точка этого множество входит в это множество с некоторой окрестностью (открытый шар)

Def 41. Точка x_0 называется предельной для множества M, если $\forall r > 0 \Rightarrow (B(x_0, r) \cap M) \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$

Def 42. Замыкание множества - присоединение к множеству его предельных точке

Def 43. Множество называется замкнутым, если совпадает со своим замыканием

St 7. *Пусть ρ - метрика* $\Rightarrow \dfrac{\rho}{1+\rho}$ *- тоже метрика.*

St 8. *Пусть $G \subset M$ - открыто, $F \subset M$ - замкнуто, тогда $M \backslash G$ - замкнуто, $M \backslash F$ - открыто.*

Th 54.
1. *Объединение произвольного числа открытых множество открыто*
2. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто*
3. *Пересечение произвольного числа замкнутых множеств замкнуто*
4. *Объединение конечного числа замкнутых множество замкнуто*

9.1 Последовательности

Def 44. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из M сходится к $x_0 \in M$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

Def 45. Метрическое пространство M называется полным, если в нем $\forall$ фундаментальная последовательность сходится.

Def 46. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из X, такой что $x_n \to x_0$ следует, что $f(x_n) \to f(x)$.

9.2 Сжимающие отображения

Def 47. Отображение $f : X \to X$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in [0, 1)$: $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y), \forall x, y \in M$.

St 9. *Сжимающее отображение непрерывно*

Th 55. *(принцип сжимающих отображений)*
Пусть M - полное пространство и $f : M \to M$ - сжимающее, тогда $\exists! x_0 \in M: \ f(x_0) = x_0$ - неподвижная точка.

St 10. *Скорость сходимости:* $\rho(x_n, x) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$

Th 56. *Пусть M - полное метрическое пространство f^m, $m \in \mathbb{N}$ - сжимающее отображение в $M \Rightarrow$ для f $\exists!$ неподвижная точка.*

Th 57. *Пусть M - полное метрическое пространство, $\overline{B}(x_0, r) \subset M$ и $f : \overline{B}(x_0, r) \to M$, f - сжимающее на шаре. Тогда если $\rho(f(x_0), x_0) \leq (1-\alpha)r$, то $\exists! x' \in \overline{B}(x_0, r)$ - неподвижная точка.*

Def 48. Метрическое пространство M называется компактным, если из $\forall$ последовательность его элементов можно выделить сходяющуюся подпоследовательность.

Th 58. *Пусть M - метрическое, полное, компактное и $f: M \to M$, $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \forall x, y \in M, x \neq y$, тогда $\exists! x' \in M: \ f(x') = x'$.*

9.3 Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства

Def 49. Два метрических пространства называется измотреческими, если между ними существует биекция, сохраняющая расстояние между точками $(M \sim M')$

Th 59. *Пусть M - метрическое пространство, тогда существует и единственно полное метрическое пространство $\widetilde{M}$, такое что $M_0 \sim M$, $M_0 \subset \widetilde{M}$, $\overline{M_0} = \widetilde{M}$*

9.4 Теорема Бэра о категориях

Def 50. Множество A назывется всюду плотным в M, если $\overline{A} = M$.

Def 51. Множество A называется нигде не плотным в M, если $\overline{A}$ не содержит ни одного шара из M.

Лемма 21. *Замкнутое множество F - нигде не плотно в $M \Leftrightarrow \overline{(M \backslash F)} = M$*

Th 60. *(О вложенных шарах)*
Пусть M - полное метрическое пространство, $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$ - вложенные шары и $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$, тогда $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$

Th 61. *Пусть M - полное метрическое пространство, $G_n \subset M$ - открытые множества, $\overline{G} = M$, тогда $\cap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.*

Def 52. Множество называется множеством I категории, если оно представимо в виде не более чем счётного объединения нигде не плотных множеств. Иначе - II категории.

Th 62. *(Бэра)*
Полное пространство - множество II категории.

10 Компактность в метрических пространствах

Def 53. Пространство M называется компактным, если из любой последовательность его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Def 54. Пространство M называется предкомпактным, если из любой последовательностми его элементов можно выделить фундаментальную последовательность

St 11. *M - предкомпактно и полно $\Rightarrow$ M - компактно*

Def 55. Пространство M называется ограниченным, если $\sup\limits_{x,y\in M} \rho(x,y) < \infty$.

Лемма 22. *Предкомпактное пространство ограничено.*

Def 56. Пусть M - метрическое. Множество $Q \subset M$ называется ε - сетью для $E \subset M$, если $E \subset \cup_{x\in Q} B(x,\varepsilon)$

Def 57. M - вполне ограничено, если $\forall\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, покрывающая M.

St 12. *Из вполне ограниченности следует обычная ограниченность, но не наоборот.*

Th 63. *M - предкомпактно $\Leftrightarrow$ M- вполне ограничено.*

Следствие 10. *(признак предкомпактности)*
M - предкомпактно, если $\forall\varepsilon > 0$ существует конечная предкомпактная ε - сеть, покрывающая M.

Th 64. *(Гейне-Бореля)*
M- компактно $\Leftrightarrow$ из $\forall$ открытого покрытия M можно выделить конечное подпокрытие.

10.1 Критерии предкомпактности

$K \subset \mathbb{R}^n$ - компакт

Th 65. *Множество $E \subset C(K)$ предкомпактно $\Leftrightarrow$ E - равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Th 66. *(Рисса) Множество $E \subset L_p(K)$ предкомпактно $\Leftrightarrow$ E - равномерно ограничено и равностепенно в смысле L_p:*

1. $\exists M > 0\ \|f\|_{L_p} \le M,\ \forall f \in E$
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \|f(x+\Delta) - f(x)\|_{L_p} < \varepsilon, \forall f \in E, |\Delta| < \delta$

Случай l_p:
$x \in l_p,\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$
$P_N(x) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$
$R_N(x) = x - P_N(x)$
$\|P_N(x)\|_{l_p} \le \|x\|_{l_p}$

Th 67. *Множество $E \subset l_p$ предкомпактно $\Leftrightarrow$*

1. $\exists M > 0\ \|x\|_{l_p} \le M, \forall x \in E$
2. $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \|R_N(x)\| < \varepsilon, \forall x \in E$

11 Банаховы пространства

Пусть X- линейное нормированное пространство.

Def 58. Если X - полное, то называется Банаховым.

Def 59. Нормы $\| * \|_1$, $\| * \|_2$ называется эквивалентными, если $\exists c_1, c_2 :\Rightarrow c_1 \| * \|_1 \leq \| * \|_2 \leq c_2 \| * \|_1$

Def 60. Пространство называется сепарабельным, если в нём существует счётное всюду плотное множество.

11.1 Отображения

X, Y **- нормированные пространства.**

Def 61. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ x_n \to x \Rightarrow \ f(x_n) \to f(x)$.

Лемма 23. *Если линейный оператор непрерывен в точке $x_0 \in X$, то он непрерывен на всём X.*

Def 62. Отображение A называется ограниченным, если переводит любое ограниченное множество в ограниченное множество

Def 63. Норма оператора: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

Лемма 24. *Пусть A - линейный, тогда* $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{x \geq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Th 68. *Линейный оператор A - непрерываен $\Leftrightarrow$ A - ограничен.*

Def 64. $L(X, Y)$ - пространство линейных операторов, действующих из X в Y

Th 69. *Если Y - банахово, то $L(X, Y)$ - банахово.*

Th 70. *(Банаха-Штейнгауза)*
Пусть X, Y - нормированные пространства, $A_n \in L(X, Y)$ и $E = \{x : \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < \infty\}$ - множество II категории, тогда $\exists M > 0 : \ \|A_n\| \leq M$.

Следствие 11. *Пусть X - банохово, Y - нормированное, $A_n \in L(X, Y)$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x\| < \infty, \forall x \in X$, тогда $\exists M > 0 : \ \|A_n\| \leq M$.*

Лемма 25. *Пусть $x(t) \in C[a, b]$, $A(x) = \int\limits_a^b \phi(t) x(t) dt$, $\phi(t) \in L(a, b)$, тогда*

$\|A\| = \int\limits_a^b |\phi(t)| dt$

Th 71. *(о расходимости тригонометрического ряда)*
Пусть $S_n(f, x)$ -тригонометрический ряд для f, тогда $\exists f \in C[-\pi, \pi] :$ $S_n(f, 0)$ - расходится.

12 Обратные операторы

$A : X \to Y$**,** X, Y **- линейные нормированные пространства**

Def 65. Оператор $A_L^{-1} : Y \to X$ называется обратным левым, если $A_L^{-1}A = E$, правый аналогично

Th 72. *Если* $\exists A_L^{-1}, A_R^{-1}$*, то* $A_L^{-1} = A_R^{-1} = A^{-1}$

Th 73. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1. $Ax = y$ *не может иметь двух решений* x
2. $\ker A = \{0\}$
3. $\exists A_L^{-1}$

Th 74. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1. $Ax = y$ *разрешимо*
2. $R(A) = Y$*,* R *- область значений оператора*
3. $\exists A_R^{-1}$

Def 66. Оператор A называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ однозначно разрешимо и устойчиво к изменениям правой части y (Обратимый - тот у которого существует ограниченный обратный)

Th 75. *Пусть* X *- банахово,* Y *- нормированное,* $A : X \to Y$*,* $\exists M > 0 : \|Ax\| \geq M\|x\|$*,* $\forall x \in X$*,* $\overline{R}(A) = Y$*, тогда* A *- обратимый.*

Th 76. *Пусть* X *- банахово,* $A : X \to X$ *и* $\|A\| < 1$*, тогда* $(E - A)$ *- обратим.*

Th 77. *Пусть* X *- банахово,* $A : X \to X$ *и* A *- ограничен, тогда*

1. $\exists R = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ *- спектральный радиус оператора*
2. *Если* $R < 1$*, то* $E - A$ *- обратим.*

Th 78. *Пусть* X *- банахово,* $A : X \to Y$ *- обратимый,* $B : X \to Y$*,* $\|A - B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow B$ *- обратим.*

Следствие 12. *Множество обратимых операторов открыто.*

Th 79. *Пусть* X *- банахово,* $A : X \to Y$ *-обратимый,* $\{A_n\} : X \to Y$ *и* $\|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow A_n$ *-обратимы, начиная с некоторого номера и* $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \to 0$

Th 80. *(Банаха об обратном операторе)*
Пусть X, Y *- банаховы пространства,* $A : X \to Y$ *- однозначно определённый ограниченный оператор,* $D(A) = X, R(A) = Y$*, тогда* A *- обратим.*

Следствие 13. *Пусть X - полно относительно двух норм $\| * \|_1, \| * \|_2$ и $\exists M > 0 : \ \|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \forall x \in X$, тогда $\exists m > 0 : \ \|x\|_2 \leq m\|x\|_1, \forall x \in X$*

Def 67. Оператор $A : X \to Y$ называется замкнутым, если $\forall x_n \to x : Ax_n \to y \Rightarrow x \in D(A), Ax = y$

Def 68. График оператора A- множество $\Gamma(A) = \{(x, Ax) : \forall x \in X\}$.

St 13. *Оператор замкнут по норме $\Leftrightarrow$ его график замкнут по норме $\|x\|^* = \|x\| + \|Ax\|$*

Th 81. *(о замкнутом графике)*
Пусть X, Y - банаховы, $A : X \to Y$, $D(A) = X$ линейный оператор A замкнут $\Rightarrow$ A - ограничен

13 Функционалы

Th 82. *(Хана-Банаха)*
Пусть M - многообразие в X (M замкнуто относительно операции сложения и умножения на элемент из поля), X - линейное нормированное пространство и на M задан линейный ограниченный функционал $f(x) : M \to \mathbb{R}$, тогда $\exists F : X \to \mathbb{R}$ - продолжение f с сохранением нормы: $f(x) = F(x), \forall x \in M$, $\|f\| = \|F\|$.
(В нашем курсе теорема доказана только если X - сепарабельно, но теорема верна и в общем случае)

Следствие 14. *Пусть $x_0 \in X, x_0 \neq 0$, тогда $\exists f(x) : X \to \mathbb{R}$ - линейный ограниченный функционал такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.*

Следствие 15. *Если $f(x_0) = 0$ для любого линейного ограниченного функционала, то $x_0 = 0$.*

Следствие 16. *Пусть M - замкнутое многообразие в X, $M \neq X$, $x_0 \in X \backslash M$, тогда $\exists$ линейный ограниченный функционал $f(x) : X \to \mathbb{R} : \ f(x) = 0 \forall x \in M, f(x_0) = 1$.*

13.1 Сопряженные пространства

Def 69. X^* - пространство линейных ограниченных функционалов над X. ($X^* = L(X, \mathbb{R})$). X^* называется сопряженным к X

St 14. *X^* - полно, т.к. $\mathbb{R}$ - полно*

Th 83. *Из сепарабельности X^* следует сепарабельность X.*

Def 70. Пространство X^{**} второе сопряженное пространство, $X^{**} = (X^*)^*$

Th 84. $X \subset X^{**}$

Лемма 26. *$\tau_x(x^*) = x^*(x), x \in X, x^*\ inX^*$, тогда $\|\tau_x\| = \|x\|$*

Def 71. Пространство называется рефлексивным, если $X^{**} = X$

Def 72. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется слабосходящейся, если $\forall x^* \in X^*$ сходится последовательность $x^*(x_n)$.

Def 73. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется слабо фундаментальной, если $\forall x^* \in X^*$ последовательность $x^*(x_n)$ фундаментальна.

Лемма 27. *Из сходимости по мере следует слабая сходимость(обратное неверно)*

Лемма 28. *Слабый предел единственен*

Th 85. *Слабо фундаментальная последовательность ограничена.*

Th 86. *Рефлексивное пространство слабо полно*

Th 87. *(О слабой компактности)*
В сепарабельном рефлексивном пространстве из всякой ограниченной последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.